Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2021

Lineare Algebra II
Blatt 7
Abgabe: 21.06.2021, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

Gegeben einen Unterraum U eines euklidischen Raum $(V, \langle -, - \rangle)$, zeige, dass das orthogonale Komplement $U^\perp$ der größte (bezüglich Inklusion) zu U orthogonale Unterraum ist.

Betrachte nun den euklidischen Raum $\mathbb{R}[T]$ mit dem Skalarprodukt

$$\begin{array}{rccc} \langle -, - \rangle : & \mathbb{R}[T] \times \mathbb{R}[T] & \to & \mathbb{R} \\ & (P(T), Q(T)) & \mapsto & \int_{-1}^{1} P(T) \cdot Q(T) dT \end{array}.$$

Zeige, dass der Unterraum $U = \{P \in \mathbb{R}[T] \mid P(-x) = -P(x)\}$ aller ungeraden Polynome im orthogonalen Komplement der Menge $\{1\}$ enthalten ist. Gilt $U = \{1\}^\perp$?

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**

(a) Gib die symmetrische Bilinearform an, welche durch die quadratische Form

$$\begin{array}{rccl} Q : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 \end{array}$$

eindeutig bestimmt wird, und zeige, dass sie ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ auf $\mathbb{R}^4$ definiert.

(b) Sei U der von den Vektoren $(1, 1, 1, 1)$ und $(3, 3, -1, -1)$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Beschreibe durch lineare Gleichungen das orthogonale Komplement $U^\perp$ in $(\mathbb{R}^4, \langle -, - \rangle)$.

(c) Bestimme eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ in $(\mathbb{R}^4, \langle -, - \rangle)$.

(d) Ergänze die Basis aus (c) zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum V aller quadratischen $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$ zusammen mit der Norm

$$\|(a_{ij})\| = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|.$$

Sei U der Unterraum aller Matrizen A aus V mit $\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$. Für einen Komplementärraum W zu U in V sei $F : V \to U$ eine Abbildung derart, dass $A - F(A)$ in W für alle Matrizen A aus V.

(a) Zeige, dass F eindeutig bestimmt und linear ist.

(b) Gegeben A aus V, zeige, dass es ein $\varepsilon > 0$ derart gibt, dass

$$\|A - B\| \geq \varepsilon \|A - F(A)\|$$

für alle B aus U.

Hinweis: Vergleiche $\mathrm{Spur}(A)$ und $\|A - B\|$.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.